waeldocuments.com

BAC SCIENCES EXPERIMENTALES

Mathématiques

[M1]

Toute l'année !

Résumés et exercices

- Cours & résumés
- Exercices d'application avec correction

Bac Sciences Expérimentales

Mathématiques

Cours, résumés, et execices corrigés

[M1]

Des résumés de tous les chapitres avec des exercices d'application

(+216) 50 40 40 42

(+216) 50 45 40 40

waeldocuments.com

waelclasses.com

@waeldocuments

Préface

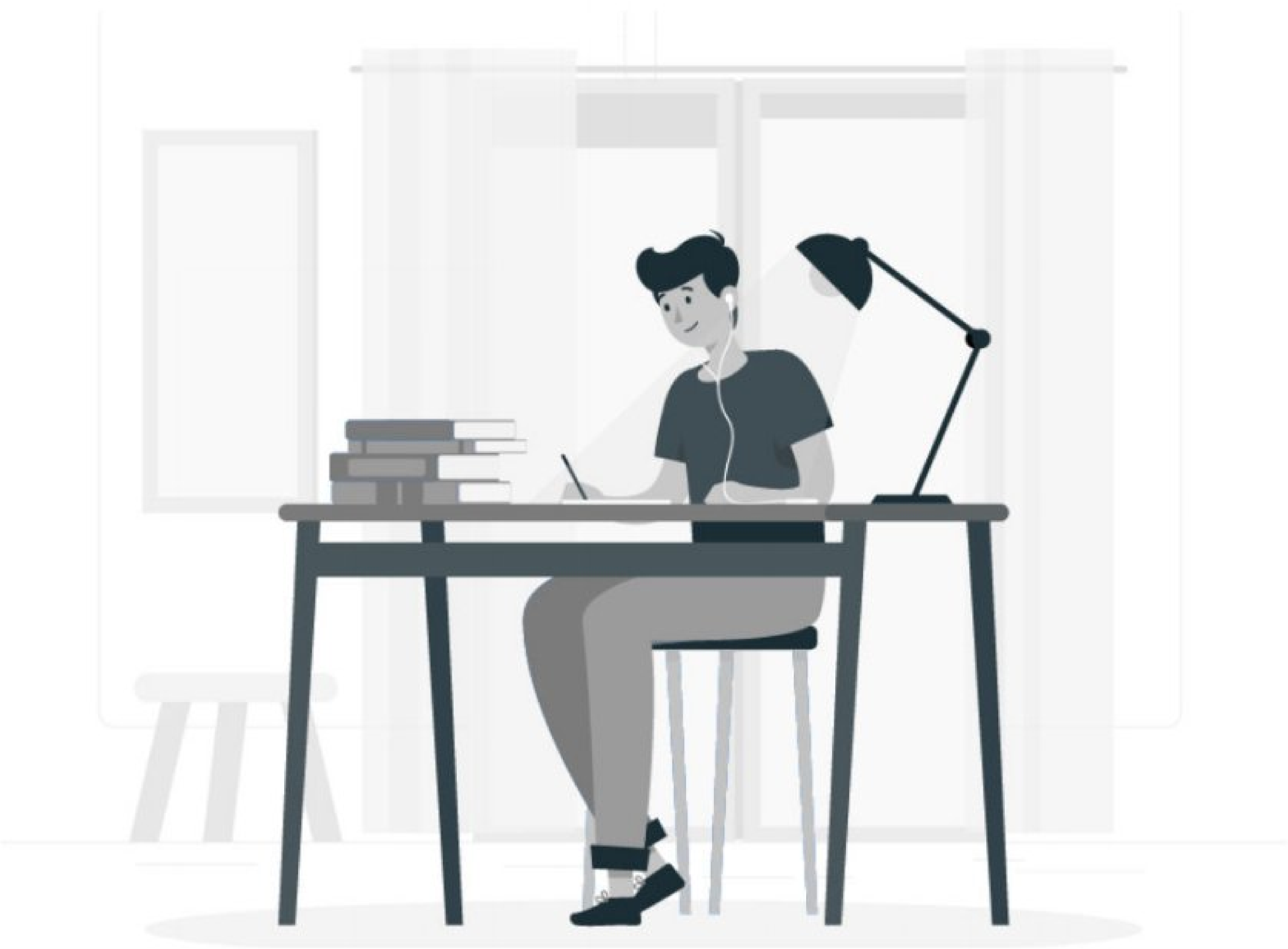
- Ce livre fait partie de la collection des parascolaires du site web éducatif **"waeldocuments.com"** .

- Il est destiné à tous les candidats de baccalauréat section sciences expérimentales ainsi qu'aux candidats qui souhaitent passer le(s) concours de réorientation TBS, IHEC et autres.

- Chaque chapitre est constitué de 2 parties:
  1ère partie: Cours et résumés qui contiennent toutes les formules du chapitre
  2ème partie: Exercices d'applications directes et exercices de difficulté moyenne qui servent à appliquer votre cours et mieux le comprendre.
- Tous les exercices sont corrigés avec détails

Bonne révision à tous! <3

Wael Documents



SOMMAIRE

Analyse (2)

FONCTIONS RÉCIPROQUES & ÉTUDE

I/ Branches infinies

Définition

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

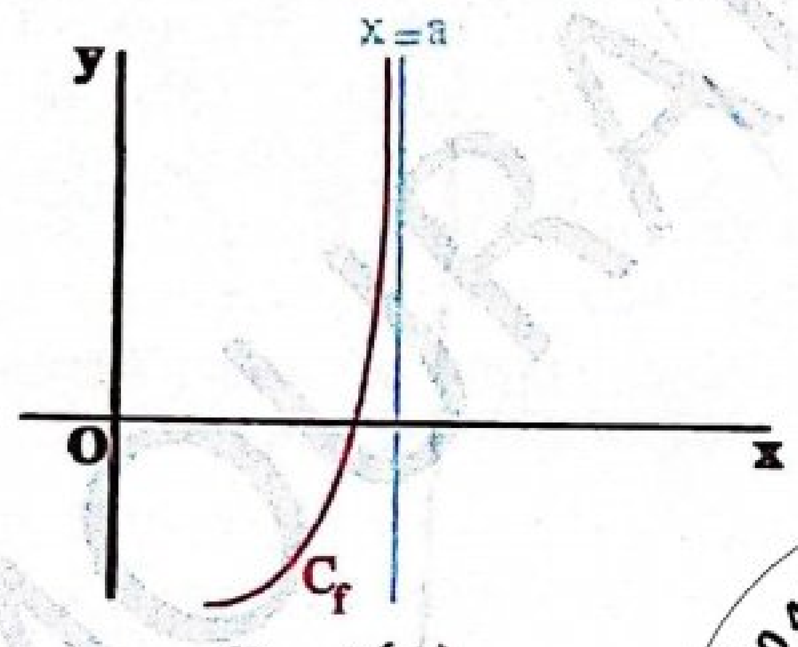
On dit que C_f admet une branche infinie dès que l'une des coordonnées d'un point de C_f tend vers l'infini.

C'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ ou $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

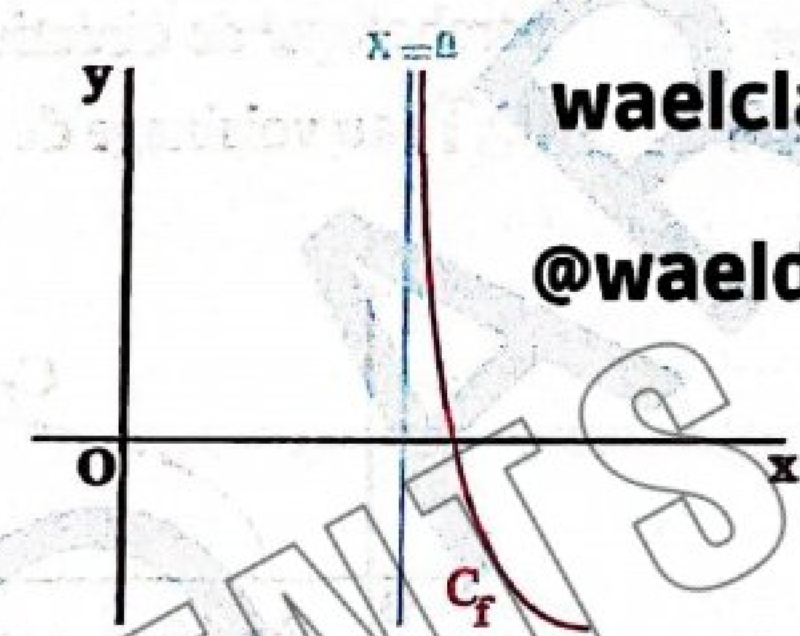
Nature d'une branche infinie

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

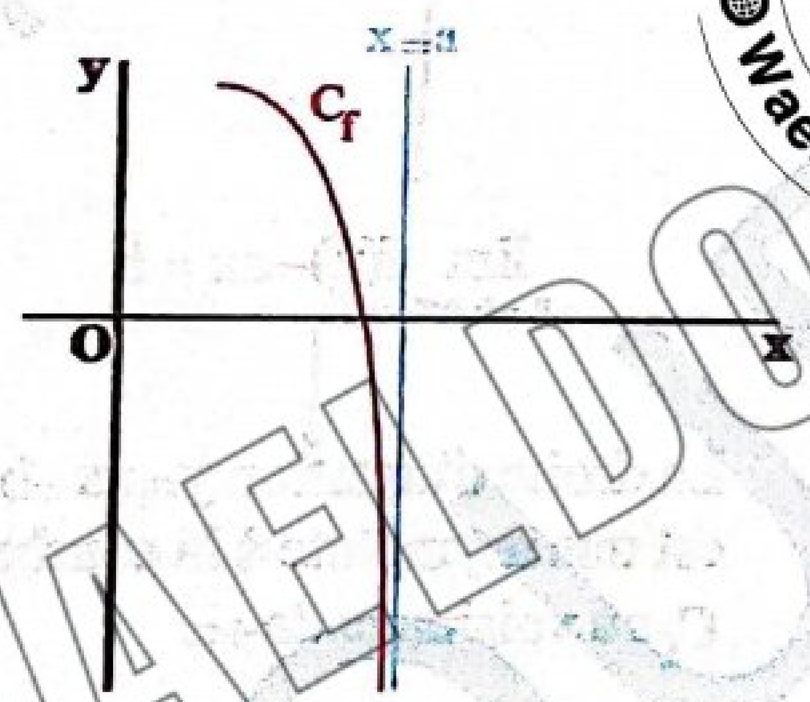
* Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ alors la droite $D: x=a$ est une asymptote verticale à C_f.



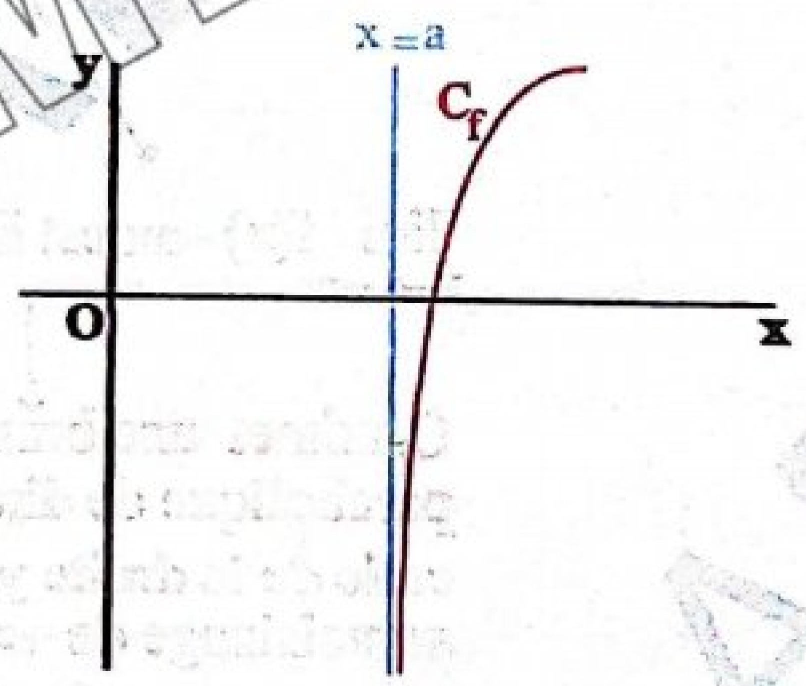
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

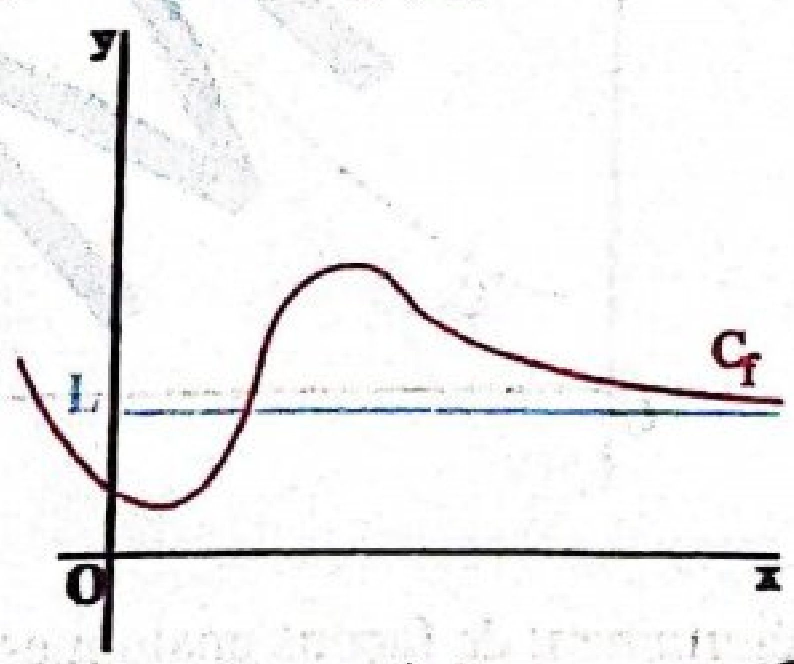


$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

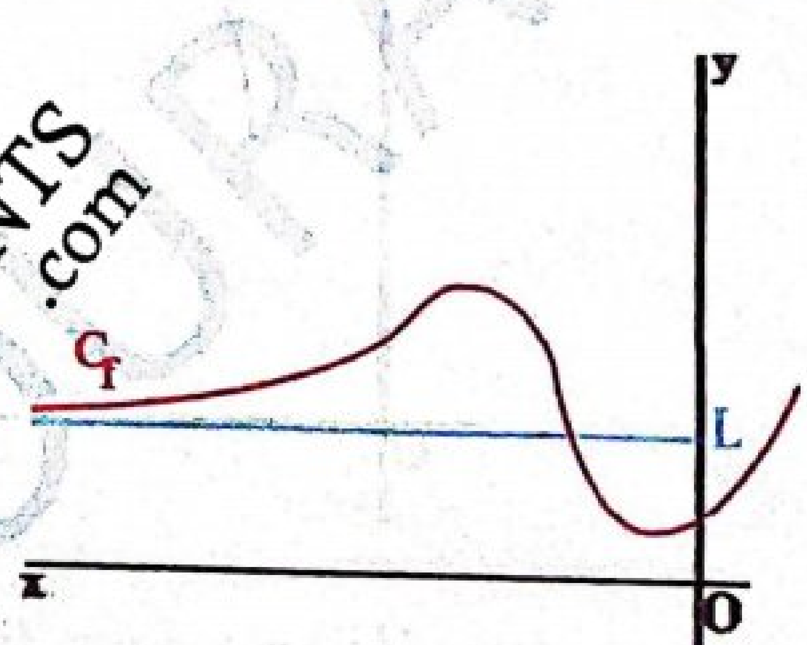


$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

* Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ alors la droite $D: y=L$ est asymptote horizontale à C_f.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

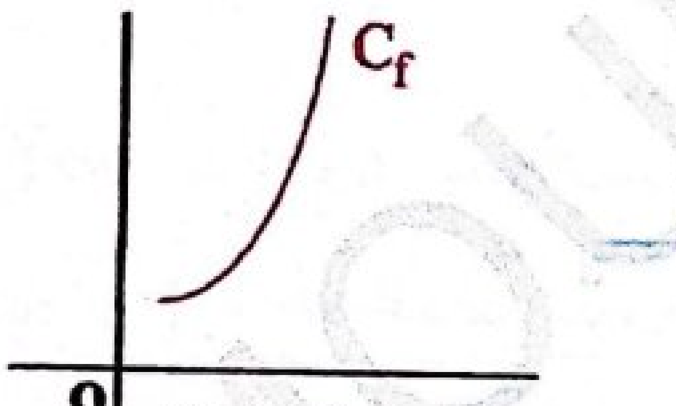
Lycée Pilote de Sfax	Résumé du cours Etude de fonctions	Mr : Mourad EL arbi $4^{ème}$ Sc exp

* Si

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$

Cas 1 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ est infinie

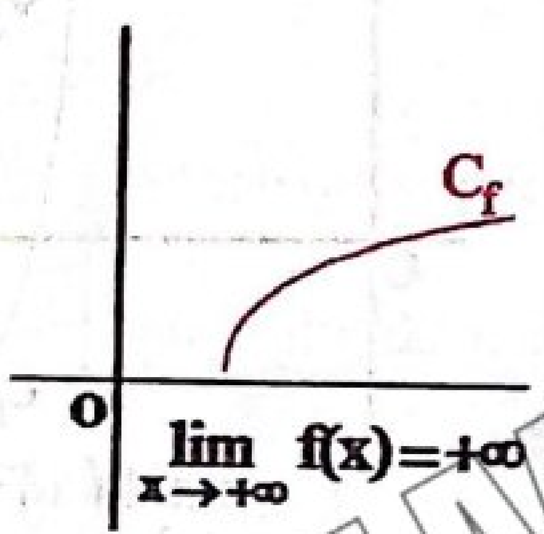
C_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Cas 2 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$

C_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$

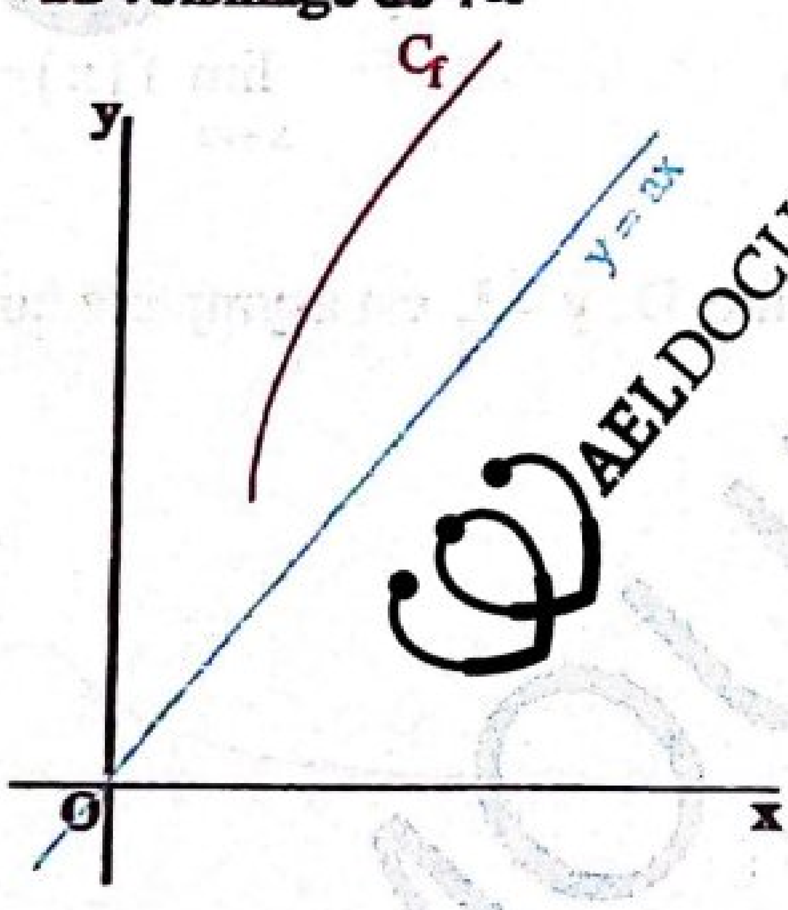


$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Cas 3 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ $(a\in\mathbb{R}^*)$

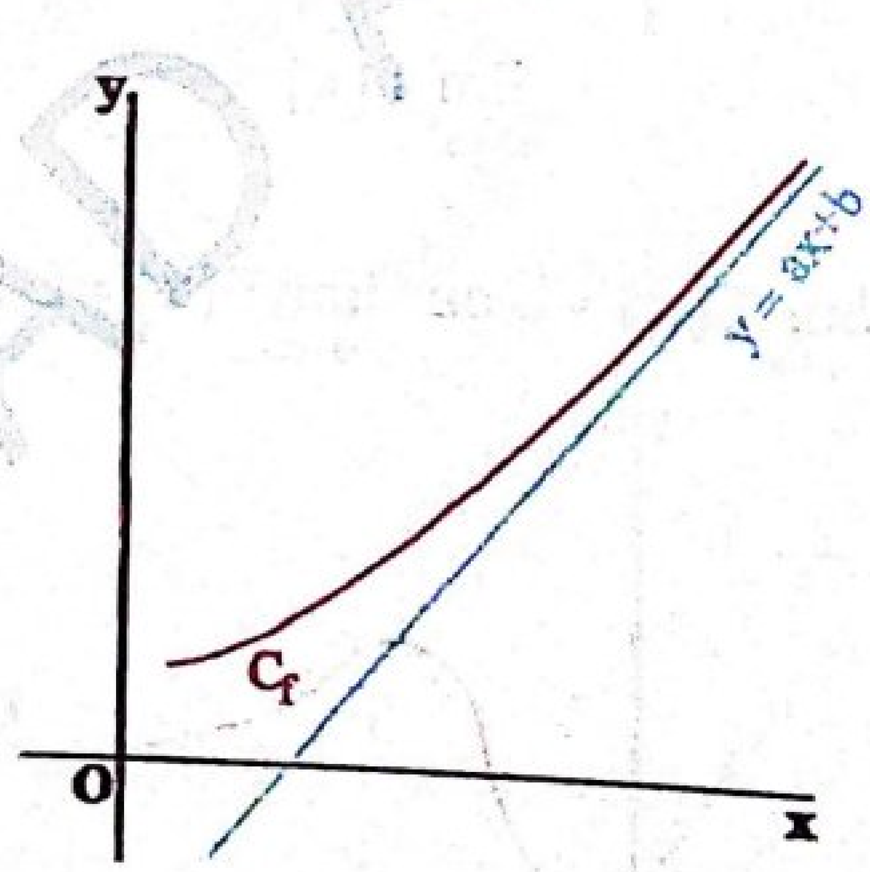
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax$ est infinie

  C_f admet une branche parabolique de direction celle de la droite $y=ax$ au voisinage de $+\infty$



- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax=b$

  La droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$



Remarques :

* Les cas $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ se déterminent de façons analogues.

* On peut au lieu de dire C_f admet une branche parabolique de direction D, on dit que la droite D est une direction asymptotique à la courbe C_f.

II/ Eléments de symétrie

Soit f une fonction définie sur D.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

* La droite $\Delta : x = a \ (a \in \mathbb{R})$ est un axe de symétrie pour C_f si pour tout x de D, $\begin{cases}(2a-x)\in D.\\ f(2a-x)=f(x).\end{cases}$

En particulier la droite des ordonnées est un axe de symétrie pour C_f si pour tout x de D, $\begin{cases}-x\in D.\\ f(-x)=f(x).\end{cases}$

C'est-à-dire f est une fonction paire.

* Le point $I(a, b)$ est un centre de symétrie de C_f, si pour tout x appartenant à D, $\begin{cases}(2a-x)\in D,\\ f(2a-x)=2b-f(x).\end{cases}$

En particulier le point O est un centre de symétrie pour C_f si pour tout x de D, $\begin{cases}-x\in D,\\ f(-x)=-f(x).\end{cases}$

C'est-à-dire f est une fonction impaire.

QCM

Nous avons représenté ci-contre le tableau de variation d'une fonction f. Cocher la réponse exacte.

x	$-\infty$		-1		-0.5		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	2	↘	0	↗	$+\infty \Vert -\infty$	↗	3	↘	-5

1. ☐ 0 est un minimum relatif de f.
   ☐ -1 est un minimum relatif de f.
   ☐ -5 est un minimum relatif de f.

2. ☐ La fonction f est croissante sur $[-1, 0]$.
   ☐ La fonction f est croissante sur $[-1, -0.5[$ et sur $]-0.5, 0]$.
   ☐ La fonction f est décroissante sur $]-\infty, -0.5]$.

3. La courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation
   ☐ $x = 2$. ☐ $x = -0.5$. ☐ $x = -5$.

4. La courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation
   ☐ $y = 2$. ☐ $y = -0.5$. ☐ $y = -1$.

5. La courbe de f et l'axe des abscisses ont
   ☐ un point commun. ☐ deux points communs. ☐ trois points communs.

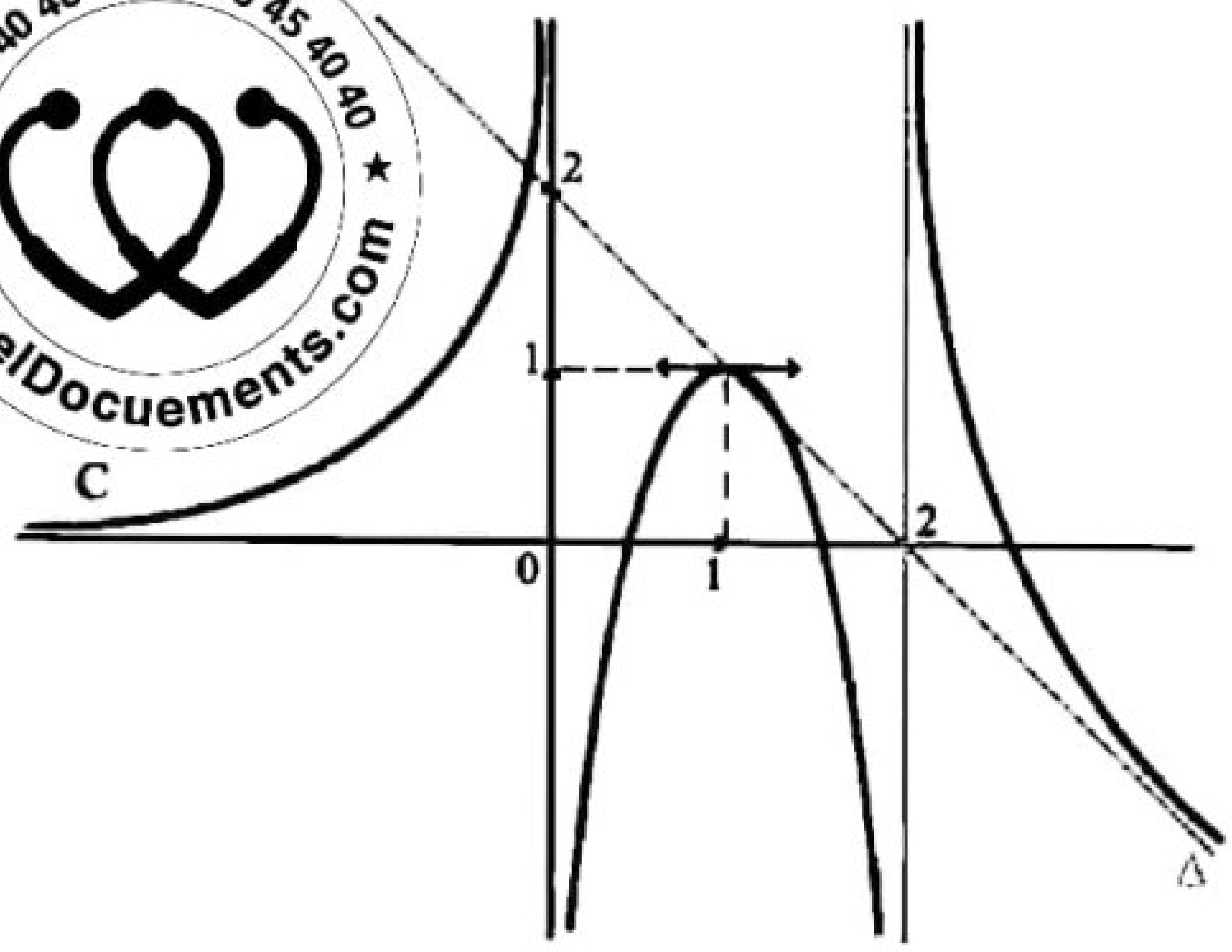
VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $]a-h, a+h[$, $(h > 0)$ et admettant une dérivée seconde continue.

1. Si $f''(a) = 0$ alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse a.
2. Si f' est décroissante sur $]a-h, a[$ et croissante sur $[a, a+h[$ alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse a.
3. Si f' est croissante sur $]a-h, a+h[$ alors f est croissante sur $]a-h, a+h[$.
4. Si f'' est négative sur $]a-h, a+h[$ alors f est décroissante sur $]a-h, a+h[$.

1 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$. La droite Δ et les droites d'équations respectives $x=0$, $x=2$ et $y=0$ sont des asymptotes à la courbe C.



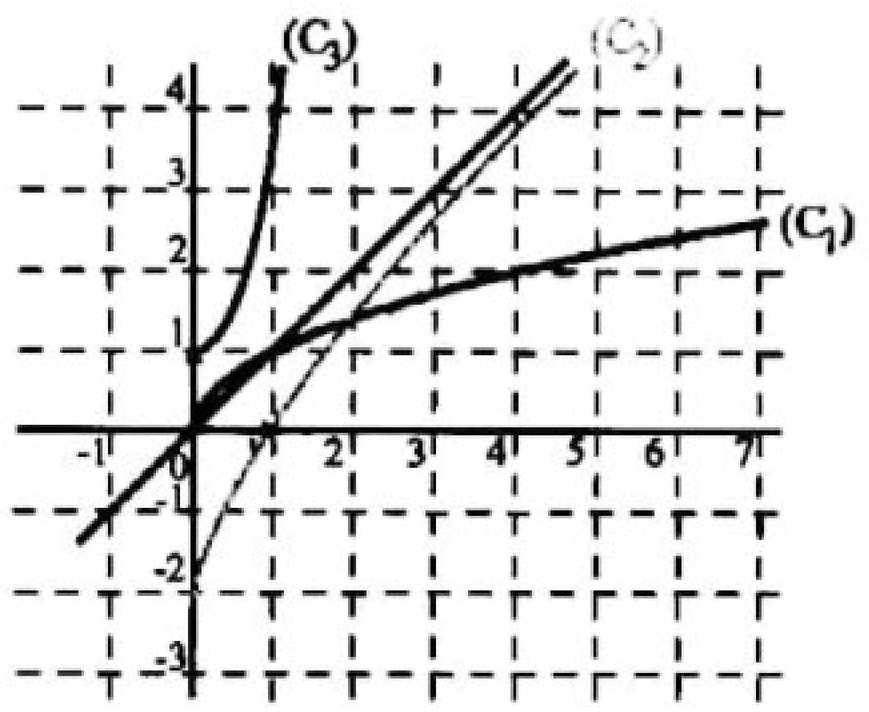
1. Déterminer graphiquement,

$\lim\limits_{-\infty} f$, $\lim\limits_{0^-} f$, $\lim\limits_{0^+} f$, $\lim\limits_{2^-} f$, $\lim\limits_{2^+} f$, $\lim\limits_{+\infty} f$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x-2$.

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

2 On a représenté trois fonctions f, g et h définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par

$f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x}$ et $h(x)=x-\dfrac{2}{x+1}$.



1. Identifier pour chaque fonction sa courbe représentative.
2. Préciser pour chaque courbe la nature de sa branche infinie.

3 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Déterminer la nature des branches infinies de la courbe de f dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f : x \mapsto 2x-3\sqrt{x-1}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}-\sqrt{x+2}$.
3. $f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.
2. Montrer que la droite d'équation $y=2x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+4 & \text{si } x\le 1,\\ \dfrac{1}{x}+x+1 & \text{si } x>1.\end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
3. Dresser le tableau de variation de f et construire la courbe de f dans un repère orthonormé.

6 1. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{9}{4x}$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Etudier les branches infinies.
5. Construire la courbe de f dans un repère orthonormé.
6. En déduire la construction de la courbe d'équation $y=\left|\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{9}{4x}\right|$.

QCM :

- 0 est un minimum relatif de f
- La fonction f est croissante sur [-1,-0,5[et]-0,5,0]
- X=-0,5
- Y=2
- Trois point communs

Vrai - Faux

- (faux) ; conte exemple : $f(x)=x^4$ et a=0
- (vrai)

x	a-h		a		a+h
f''(x)		-	0	+	
f'(x)		↘	f'(a)	↗	

f'' s'annule en a en changeant de signe d'où le point I(a,f(a)) est un point d'inflexion pour (C_f)

- (faux) ; contre exemple : $f(x)=\frac{1}{x}$, $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$, I=]0,2[f' est croissante sur]0,2[mais f est décroissante sur]0,2[
- (faux) ; contre exemple :

$f(x)=\cos x$ $\quad$ I= $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$f'(x)=-\sin x$

$f''(x)=-\cos x\le 0$ $\quad$ pour x ∈ I

mais f n'est pas décroissante sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice n° 1

$\Delta : y=-x+2$

- $* \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ $\;* \lim_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ $\;* \lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ $\;* \lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$

$* \lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ $\;* \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ $\;* \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=-1$ $\;* \lim_{x\to+\infty} (f(x)+x-2)=0$

$* \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\frac{\sqrt{x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{x+2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=0$$

(ζ_f) admet une branche infinie de direction parabolique celle de $(O,\vec{i})$

- $f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x-1		-		-	0	+	
x+1		-	0	+		+	
$\frac{x-1}{x+1}$		+	‖	-	0	+	

$D_f=]-\infty;-1[\cup[1,+\infty[$

$* \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=1$

- $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty} x.\left[\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right]=\lim_{x\to+\infty} x.\left[\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x.\left[\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right)=-1$$

d'où Δ:y=x-1 est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage (+∞)

$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty \Rightarrow$ *la droite d'éq* : $x=-1$ *est une* asymptote à (ζ_f)

x	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
f'(x)	+	‖	+	0	-	‖	-	
f(x)	$0 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	$-\infty$

● * $m\in\left]-\infty,0\right]\cup\{1\}$ l'équation : f(x)=m admet trois solutions

* $m\in\left]0,1\right[$ l'équation f(x)=m admet quatre solutions

* $m\in\left]1,+\infty\right[$ l'équation f(x)=m admet deux solutions

Exercice n° 2

● $(\zeta_f)=(\zeta_3)$; $(\zeta_g)=(\zeta_1)$; $(\zeta_h)=(\zeta_2)$

● * (ζ_1) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$

* (ζ_2) admet la droite Δ:y=x comme asymptote oblique

* (ζ_3) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

Exercice n° 3

● $D_f=[1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-3\sqrt{x-1}=-\infty$ d'où : la droite Δ:y=2x est une direction asymptotique à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$

● $f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x+2}$ $D_f=[-2,+\infty[/\{0\}$

* $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}-\sqrt{x+2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$

la droite d'équation x=0 est une asymptote verticae à (ζ_f)

* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=1$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\left(\dfrac{-2}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+1}\right)=-1$

Δ:y=x-1 asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

Exercice n° 4

$f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$

● $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\sqrt{1+x^2})^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0$

d'où y=0 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

● $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0$

d'où Δ:y=2x est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

Exercice n° 5

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+4 & \text{si } x\le1 \\ \dfrac{1}{x}+x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

● $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x-1)^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0=f'_g(1)$

* $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{1}{x}+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-2x+1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{x}=0=f'_d(1)$

f est dérivable à gauche et à droite en 1 et $f'_d(1)=f'_g(1)=0$ d'où

f est dérivable en 1 et f'(1)=0

- la fonction : $x \mapsto x^2 - 2x + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 1[$ d'où f est dérivable sur $]-\infty, 1[$
- de meme f est dérivable sur $]1, +\infty[$
- f est dérivable en 1

conclusion : **f est dérivable sur IR**

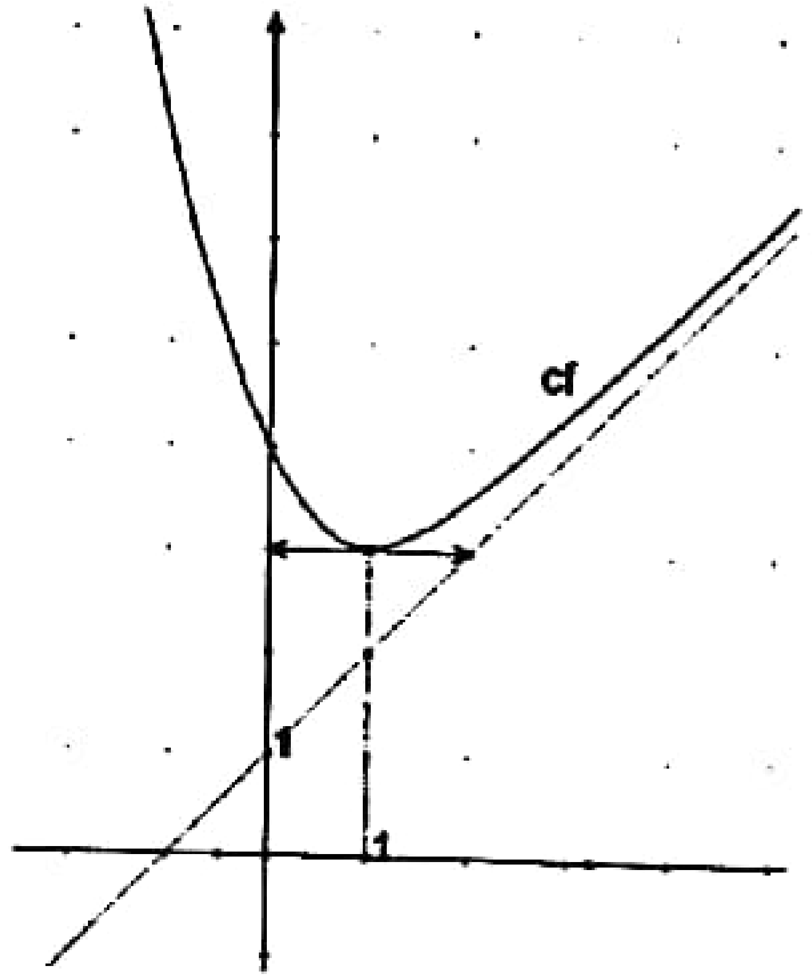
$$f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x \leq 1 \\ f'(1) = 0 & \\ \dfrac{x^2-1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- $$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - 2 + \dfrac{4}{x}) = +\infty$ (C_f) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage $(+\infty)$



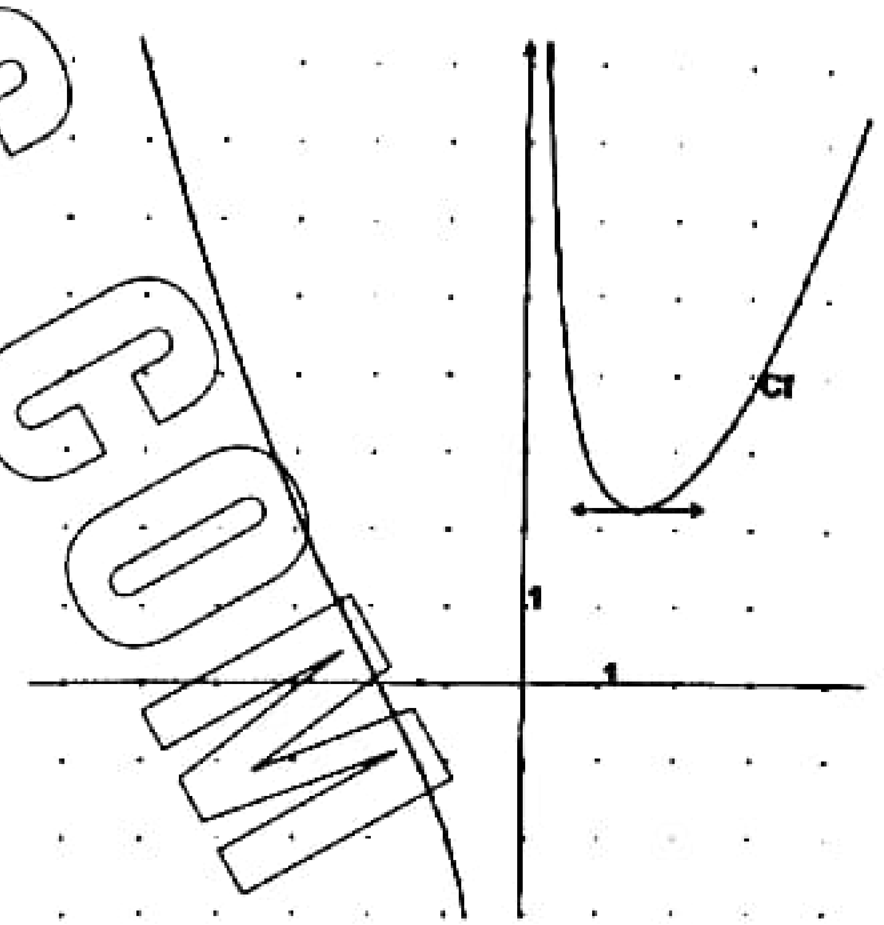
Exercice n° 6

$f(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{9}{4x}$

- $D_f = \mathbb{R}^*$
- $f'(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{9}{4x^2} = \dfrac{(2x-3)(4x^2+6x+9)}{12x^2}$ le signe de $f'(x)$ est celui de (2x-3) car $4x^2 + 6x + 9 > 0$
-

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f'(x)		-	||	-	0	+	
f(x)	$+\infty$ ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$

- la droite d'équation x=0 est une asymptote à (C_f)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{9}{4x^2}\right) = +\infty$ (C_f) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage $(+\infty)$
- de meme : $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ (C_f) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage $(-\infty)$
-



- $(C') : y = |f(x)|$

Remerciement

Wael, le fondateur du site **waeldocuments.com**, tient à remercier toute personne qui a contribué au succès de ce project, et vous promet une amélioration continue du contenu et du design des documents.

Toute le courage du monde ! <3

Wael Documents

Dans la même collection