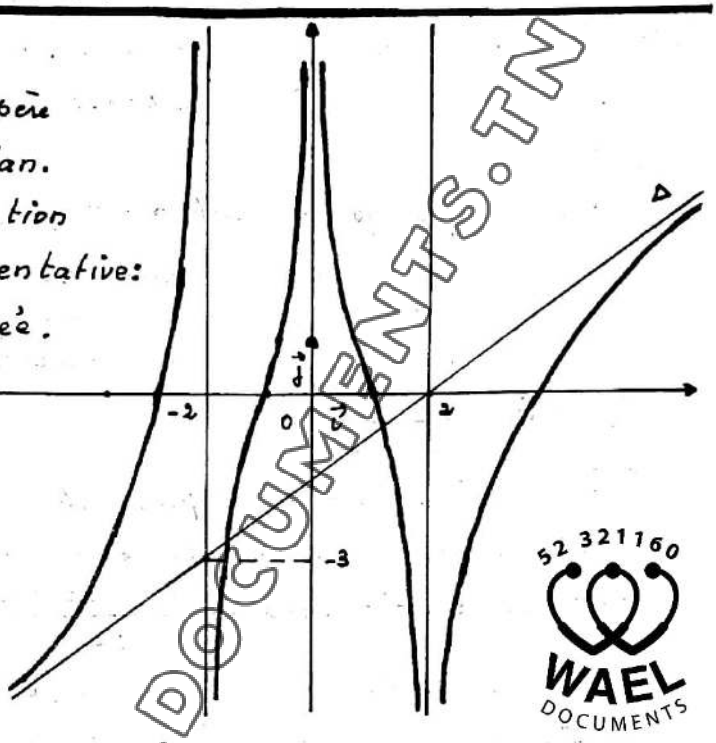
WAELDOCUMENTS

Limites et continuités - Exercices corrigés

Exercices.

Ex. 1

$(o, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.
Soit f une fonction de courbe représentative: $(\mathscr{C})$ ci-indiquée.
En justifiant du graphique:



1) a) préciser le domaine de définition de f.
b) indiquer les intervalles où f est continue
c) donner l'équation cartésienne de Δ.
d) les limites aux bornes de l'ensemble: D de définition de f sont aussi à préciser.

2°) Déterminer le nombre des solutions de l'équation: $f(x) = k$; $k \in \mathbb{R}$.

3°) Dresser un tableau qui indique le sens des variations ainsi que les limites aux bornes de D.

Ex. 2

$(o, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

1°) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - \sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

On calculera: $f(1)$, $f(-1)$, $f(4)$, $f(-4)$.

(54

2°) Montrer, graphiquement, que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3°) a) Montrer que f est continue en : 0.

b) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Ex. 3

1°) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$.

2°) Calculer chacune des limites :

a) $\lim\limits_{+\infty} \frac{x}{2-\cos x}$; $\lim\limits_{+\infty} \frac{x+\cos x}{2-\cos x}$

b) $\lim\limits_{-\infty} \frac{x}{2-\cos x}$

Ex. 4 $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

1) Déterminer l'ensemble de continuité de la fonction : $f : x \longmapsto \frac{-5x^2+x+1}{x+2}$.

2) a) Déterminer les réels : a, b, c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-5x^2+x+1 = (x+2)(ax+b)+c$.

b) En déduire une nouvelle écriture de $f(x)$.

c) Calculer ainsi les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

3°) Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet deux asymptotes qu'on les déterminera.

Ex. 5

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

1°) Soit a et b deux constantes réelles et la fonction : $f : x \longmapsto (x-a)^2+b$.

Montrer que la droite d'équation : $y = x - a$ est asymptote en : $+\infty$ à la courbe de $\sqrt{f}$.

2) En déduire ainsi une asymptote en : $+\infty$ à :

a) la courbe de : $g : x \longmapsto \sqrt{x^2-3x}$

b) la courbe de : $h : x \longmapsto \sqrt{x^2-2x+3}$.

Ex.6

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

1°) Montrer que $f: x \mapsto x - 4\sqrt{x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

2°) a) Calculer : $\lim\limits_{+\infty} f(x)$.

b) Calculer : $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Interpréter graphiquement le résultat.

Ex.7

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et n un entier naturel non nul.

On considère la fonction $f_n: x \mapsto \frac{x^{n+1}}{x^n - 1}$ de courbe représentative : $(\mathscr{C}_n)$.

1) Montrer que la droite $\Delta : y = x+1$ est asymptote en $+\infty$ à $(\mathscr{C}_1)$.

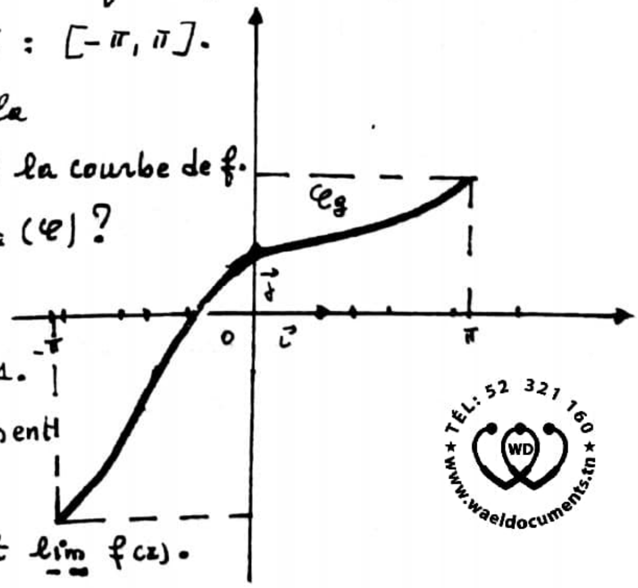
2°) Montrer que si $n \geq 2$, alors la droite : $D : y = x$ est asymptote en $+\infty$ à $(\mathscr{C}_n)$.

Ex.8

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

On considère la fonction : $f : x \mapsto \cos x + x$ et on note g sa restriction à : $[-\pi, \pi]$.

La courbe $\mathscr{C}_g$ de g est la ci-contre. On note : $(\mathscr{C})$ la courbe de f.



1°) Expliquer comment on trace $(\mathscr{C})$?

2°) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.

3°) Interpréter graphiquement le résultat de 2°).

4) a) Calculer : $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{-\infty} f(x)$.

(56

b) Calculer : $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Interpréter graphiquement le résultat.

c) Peut-on affirmer que : $\lim\limits_{+\infty} (f(x)-x)$ existe ?

Ex.9

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier la limite en zéro de la fonction : $f_n : x \mapsto \frac{1}{x^n}\left(\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - \dots - x^n\right)$.

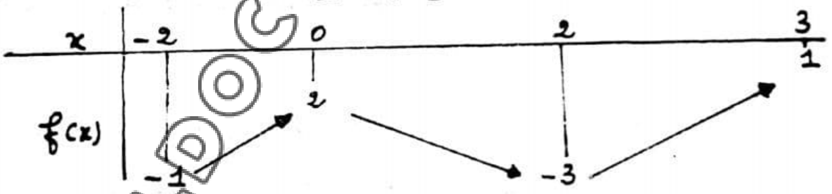
2°) Calculer la limite en zéro de : $\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)(\tan x)$.

3°) Justifier que : $\lim\limits_{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+2x}{x} = 3$.

4) Calculer : $\lim\limits_{8} \frac{4-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+x}-3}$; $\lim\limits_{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{1+x}$.

Ex.10

f est une fonction continue sur $[-2,3]$ dont le tableau de la variation est :



1) Déterminer les images par f des intervalles : $[-2,0]$, $[0,2]$, $[2,3]$, $[0,3]$ et $[-2,3]$.

2) Dénombrer les solutions des équations :

a) $f(x) = -\frac{1}{2}$; b) $f(x) = 3$; c) $f(x) = \frac{3}{2}$; d) $f(x) = 1$.

3) Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation : $f(x) < 2$.

4) Déterminer : $f \circ f(0)$.

Ex.11

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que : $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

Démontrer qu'il existe un réel α dans $[0,1]$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$.

WAELDOCUMENTS

Limites et continuités- Correction des exercices

Corrigés.

Ex. 1

1) a) les droites d'équations : $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ sont les seules asymptotes verticales à la courbe $(\mathscr{C})$ de f, alors : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

b) La courbe $(\mathscr{C})$ de f ne présente aucun saut sur chacun des intervalles : $]-\infty, -2[$, $]-2, 0[$, $]0, 2[$ et $]2, +\infty[$, alors f est continue sur chacun de ces intervalles.

c) La droite Δ passe par les points de coordonnées : $(-2, -3)$ et $(2, 0)$, alors :

son coefficient directeur est : $\dfrac{0-(-3)}{2-(-2)} = \dfrac{3}{4}$, donc

$\Delta : y = \frac{3}{4}x + p$; $p \in \mathbb{R}$

De plus : $A(2, 0) \in \Delta \Rightarrow 0 = \frac{3}{2} + p \Rightarrow p = -\frac{3}{2}$,

alors : $\Delta : y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$.

d) Du graphique, on a :

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{(-2)^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{(-2)^+} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{2} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.

2°) Du graphique : pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'équation : $f(x) = k$ admet : 4 solutions dans $\mathbb{R}$.

3°) Du graphique : les variations de f sont résumées dans le tableau :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Ex. 2

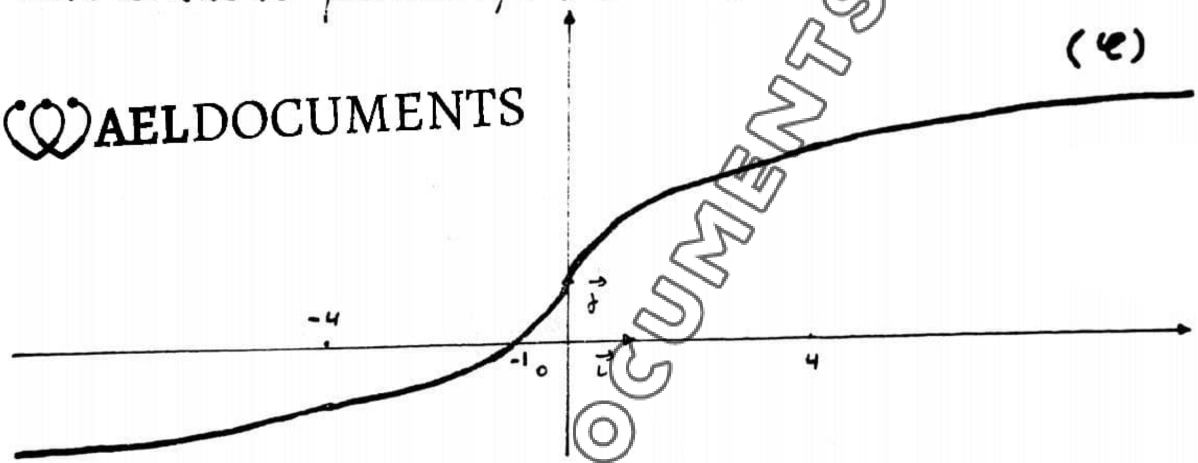
1°) * la courbe $(\mathscr{C})$ de f passe par les points de coordonnées : $(-4, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 3)$.

(58

* $\lim\limits_{0^-} f(x) = \lim\limits_{0^-} (1-\sqrt{-x}) = 1 = f(0)$, alors f est continue en : 0.

* $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$, alors $\mathscr{C}$ admet, en $+\infty$, une branche parabolique de direction : $(O,\vec{i})$.

* $\lim\limits_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{-\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{-x}}\right) = 0$, alors $\mathscr{C}$ possède une une branche parabolique, en $-\infty$, de direction : $(O,\vec{i})$.



2°) Du graphique obtenu, la courbe $(\mathscr{C})$ ne présente aucun saut, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) a) on a : $f(0) = 1$

$\lim\limits_{0^-} f(x) = f(0)$, alors f est continue en : 0.

b) * f est continue en : 0.

* la fonction : $x \longmapsto 1+\sqrt{x}$, restriction de f à $\mathbb{R}_+$, est continue sur $\mathbb{R}_+$, alors f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

* la fonction : $x \longmapsto 1-\sqrt{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}_-$, alors sa restriction f à $\mathbb{R}_-^*$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Ex. 3

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2-\cos x \leq 3$;

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$.

2/a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. De 1°), on a :

* $\frac{x}{3} \leq \frac{x}{2-\cos x}$. Comme : $\lim\limits_{+\infty} \frac{x}{3} = +\infty$, alors :

$\lim\limits_{+\infty} \frac{x}{2-\cos x} = +\infty$.

* si $x \geq 1$, alors : $x + \cos x \geq 0$, donc :

$$\frac{x+\cos x}{2-\cos x} \geq \frac{x+\cos x}{3} \geq \frac{x-1}{3} \quad \text{car } -1 \leq \cos x \leq 1.$$

mais : $\lim\limits_{+\infty} \frac{x-1}{3} = +\infty$, alors $\lim\limits_{+\infty} \frac{x+\cos x}{2-\cos x} = +\infty$.

b) si $x \leq 0$, alors de 1°) : $\frac{x}{2-\cos x} \leq \frac{x}{3}$.

mais : $\lim\limits_{-\infty} \frac{x}{3} = -\infty$, alors $\lim\limits_{-\infty} \frac{x}{2-\cos x} = -\infty$.

Ex. 4

1°) on a : $x + 2 = 0 \iff x = -2$ alors : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

* f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, alors f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

2°) a) Soit : a, b, c des réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-5x^2 + x + 1 = (x+2)(ax+b) + c$, alors :

$-5x^2 + x + 1 = ax^2 + (b+2a)x + 2b + c$, donc de l'égalité de deux polynomes, on obtient :

$$\begin{cases} a = -5 \\ b + 2a = 1 \\ 2b + c = 1 \end{cases}, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = -5 \\ b = 11 \\ c = -21 \end{cases}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = \frac{(x+2)(-5x+11) - 21}{x+2}$

$= -5x + 11 - \frac{21}{x+2}$.

c) * $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \left(-5x + 11 - \frac{21}{x+2}\right) = +\infty$.

(60

* $\lim_{(-2)^-} f(x) = \lim_{(-2)^-} \left(-5x+11 - \frac{21}{x+2}\right) = +\infty.$
* $\lim_{(-2)^+} f(x) = \lim_{(-2)^+} \left(-5x+11 - \frac{21}{x+2}\right) = -\infty.$
* $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \left(-5x+11 - \frac{21}{x+2}\right) = -\infty.$

3) on a :

* $\lim_{(-2)^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{(-2)^+} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation : $x = -2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

* $\lim_{+\infty} \left(f(x) - (-5x+11)\right) = \lim_{+\infty} \frac{-21}{x+2} = 0$,

$\lim_{-\infty} \left(f(x) - (-5x+11)\right) = \lim_{-\infty} \frac{-21}{x+2} = 0$, alors la droite d'équation : $y = -5x+11$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

Ex. 5

1°) Soit une fonction : $f : x \longmapsto (x-a)^2 + b$; $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

* $\lim_{+\infty} \left(\sqrt{f(x)} - (x-a)\right) = \lim_{+\infty} \frac{f(x) - (x-a)^2}{\sqrt{f(x)} + x - a}$

$= \lim_{+\infty} \frac{b}{\sqrt{f(x)} + x - a}$

$= 0$

car : $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \left[(x-a)^2 + b\right] = +\infty.$

2) a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$, alors de 1°),

la droite d'équation : $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote, en : $+\infty$, à la courbe de la fonction : $g : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 3x}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$, alors la droite d'équation : $y = x - 1$ est asymptote, en : $+\infty$, à la courbe de la fonction $h : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

Ex. 6 1) La fonction : $x \longmapsto x$ est affine et la fonction :

$x \mapsto -4\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, alors leur somme : $f: x \mapsto x - 4\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. (6)

2) a) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} (x - 4\sqrt{x}) = \lim\limits_{+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 4) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{x - 4\sqrt{x}}{x}\right) = \lim\limits_{+\infty} \left(1 - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) = 1$, alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet, en $+\infty$, une asymptote ou une direction asymptotique de coefficient directeur : 1.

Ex.7

1°) $\lim\limits_{+\infty} (f_1(x) - x) = \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{x} = 1$, alors la droite Δ d'équation : $y = x + 1$ est asymptote, en $+\infty$, à $(\mathscr{C}_1)$.

2°) Si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, on a :

$$\lim\limits_{+\infty} (f_n(x) - x) = \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{x^n - 1} - x\right) = \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{x^n - 1}$$
$$= \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{x^n}$$
$$= \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}}$$
$$= 0 \quad \text{car : } n \geq 2.$$

alors la droite D : $y = x$ est asymptote, en $+\infty$, à $(\mathscr{C}_n)$.

Ex.8

1) la fonction $f: x \mapsto \cos x + x$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + x + 2\pi$
$$= f(x) + 2\pi$$

alors on obtient la courbe $(\mathscr{C})$ de f à partir de $\mathscr{C}_g$ à l'aide des translations : $t_{2k\pi(\vec{i}+\vec{j})}$; $k \in \mathbb{Z}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.

3°) la courbe $(\mathscr{C})$ de f est comprise entre les droites d'équations : $y = x - 1$ et $y = x + 1$.

H) a) • $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq x - 1$ et $\lim\limits_{+\infty} (x-1) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.

• $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) \leq x + 1$ et $\lim\limits_{+\infty} (x+1) = -\infty$, alors : $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$x - 1 \leq f(x) \leq x + 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \frac{1}{x}.$$

Comme : $\lim\limits_{+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$,

alors : $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, donc la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet une asymptote ou une direction asymptotique, en $+\infty$, de coefficient directeur : 1.

c) $\lim\limits_{+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{+\infty} (x + \cos x - x) = \lim\limits_{+\infty} \cos x$.

Mais : $\lim\limits_{+\infty} \cos x$ n'existe pas, donc $\lim\limits_{+\infty} (f(x) - x)$ n'existe pas.

Ex. 9

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$1 + x + x^2 + \dots + x^n$ est la somme des : $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme : 1 et de raison : x, alors :

$$\lim_{0} f_n(x) = \lim_{0} \left[\frac{1}{x^n} \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - \dots - x^n \right) \right]$$

$$= \lim_{0} \left[\frac{1}{x^n} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \right) \right]$$

$$= \lim_{0} \frac{x}{1-x}$$

$$= 0$$

2) $\lim\limits_{0} \left[\left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} \right) (\tan x) \right] = \lim\limits_{0} \left[\left(\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \right) \left(\frac{\tan x}{x} \right) \right] = 2.$

3°) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+2x}{x} = \lim\limits_{+\infty} \left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2\right) = 3.$ (63

4) * $\lim\limits_{8} \dfrac{4-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+x}-3} = \lim\limits_{8} \dfrac{-2(\sqrt{1+x}+3)}{4+\sqrt{2x}} = \dfrac{3}{2}.$

* soit $x \in \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\sqrt{x}\cos x}{1+x}\right| \leq \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}.$

- Comme : $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1+x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = 0$, alors:

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\cos x}{1+x} = 0.$

Ex. 10

1°) * f est continue et croissante sur $[-2,0]$, alors:
$f([-2,0]) = [f(-2), f(0)] = [-1, 2].$
* f est continue et décroissante sur $[0,2]$, alors:
$f([0,2]) = [f(2), f(0)] = [-3, 2].$
* f est continue et croissante sur $[2,3]$, alors:
$f([2,3]) = [f(2), f(3)] = [-3, 1].$
* f est continue sur $[0,3]$ de valeur minimale: $f(2)=-3$ et de valeur maximale : $f(0)=2$, alors:
$f([0,3]) = [-3, 2].$
* f est continue sur $[-2,3]$ de valeur minimale : $f(2)=-3$ et de valeur maximale : $f(0)=2$, alors: $f([-2,3]) = [-3,2].$

2) a) L'équation : $f(x) = -\frac{1}{2}$ admet 3 solutions dans l'intervalle: $[-2,3]$.
b) L'équation: $f(x)=3$ admet zéro solution dans $[-2,3]$.
c) l'équation: $f(x)=\frac{3}{2}$ admet : 2 solutions dans $[-2,3]$.
d) l'équation : $f(x)=1$ possède : 3 solutions dans $[-2,3]$.

3°) on a : $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 0$, alors : (64)

l'ensemble des solutions de l'inéquation : $f(x) < 2$ dans $[-2, 3]$ est : $[-2, 0[\cup]0, 3]$.

4) $f \circ f(0) = f(f(0)) = f(2) = -3$.

Ex. ii

1°). La fonction f est continue sur $[0, 1]$, alors la $g : x \longmapsto f(x) - x$ est continue sur $[0, 1]$.

* $g(0) = f(0)$

  $g(1) = f(1) - 1$.

- Comme pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$, alors : $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$, donc $g(0) \cdot g(1) \leq 0$.

Ainsi du théorème des valeurs intermédiaires, il existe, au moins, un réel α dans $[0, 1]$ tel que : $g(\alpha) = 0$

mais : $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$, alors $f(\alpha) = \alpha$.